

EMPUJE SOBRE UN MURO DE CONTENCIÓN VERTICAL, PRODUCIDO POR LA ACCIÓN DE UNA CARGA SOBRE UN TERRENO ELÁSTICO

Por IGNACIO DA-RIVA DE LA CAVADA

Resumen.

EN el presente trabajo se desarrolla un método de cálculo del empuje que produce sobre un muro una carga situada sobre un terreno adyacente a dicho muro.

Por medio de hipótesis físicas sencillas, se llega a resultados que parecen diferir de los obtenidos experimentalmente en márgenes tolerables, dentro de la aproximación normalmente usada en los cálculos.

Se incluye una generalización para dos muros iguales y paralelos, fundada en un artificio análogo al empleado en Aerodinámica, para estudiar la interferencia entre las paredes y el modelo en los ensayos en túnel aerodinámico.

Finalmente se presenta una familia de curvas adimensionales que dan el empuje para sobrecargas geoméricamente semejantes, situadas a diferentes distancias del muro. Familias de este tipo pueden ser de gran utilidad, ya que se ha comprobado que, para los pesos y presiones de inflado usuales, las huellas de las ruedas de diferentes aviones son geoméricamente semejantes.

Estas familias podrían servir para un ulterior intento de obtención de fórmulas aproximadas de más fácil aplicación.

Supongamos que se trata de un paramento liso, vertical, en contacto con tierras escurridizas y poco compactas.

El problema que tratamos de resolver consiste en encontrar un sistema de tensiones en el terreno que, equilibrando las fuerzas exteriores y cumpliendo las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la teoría de la Elasticidad, verifique las condiciones de contorno de nuestro caso particular.

Dichas condiciones de contorno son: *a*), fuerza cortante nula en la superficie del terreno; *b*), libre resbalamiento de éste a lo largo del paramento, que se traduce en fuerza cortante nula en el plano del muro.

En la hipótesis de terreno perfectamente elástico las ecuaciones de equilibrio son, como sabemos, diferenciales lineales; podemos, por tanto, superponer soluciones ya conocidas, con el fin de obtener una combinación lineal de todas ellas que cumpla las condiciones de contorno de nuestro problema.

Por medio de una ingeniosa superposición de soluciones, BOUSSINESQ encontró una solución que cumple la condición de contorno *a*). Para ello consideraba el estado de tensiones producido por una fuerza situada en un medio infinito y el estado de tensiones debido a una distribución uniforme de centros de presión a lo largo de la línea de acción

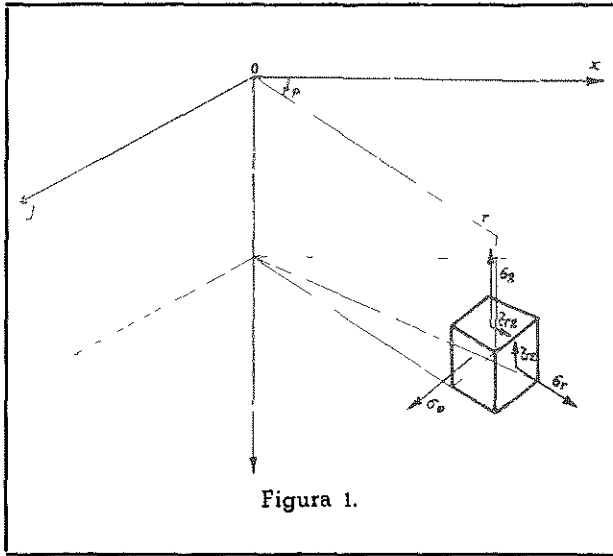


Figura 1.

de la fuerza, en un segmento de longitud semiinfinita a partir del punto de aplicación de la fuerza. Sumando ambas sollicitaciones y expresando la anulación de la fuerza cortante en el plano normal a la fuerza que pasa por su punto de aplicación, obtuvo la distribución de esfuerzos en un terreno por la acción de una carga vertical (Ref. 1, 2 y 3). En coordenadas cilíndricas los esfuerzos son:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[(1 - 2\mu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^3} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right]$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} (1 - 2\mu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^3} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right]$$

$$T_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} r z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2}$$

En coordenadas cartesianas rectangulares (figura 1), teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2; \quad \sin \theta = y (x^2 + y^2)^{-1/2}; \\ \cos \theta &= x (x^2 + y^2)^{-1/2}; \quad \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta; \quad T_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta; \\ T_{xz} &= \frac{T_{rz}}{\cos \theta}; \quad T_{yz} = \frac{T_{rz}}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

resulta:

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \left[(1 - 2\mu) \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} + \frac{z y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] - \frac{3 z x^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \Big]$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \left[(1 - 2\mu) \left[\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{z x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] - \frac{3 z y^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right]$$

$$T_{xy} = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{x y}{x^2 + y^2} \left[(1 - 2\mu) \left[\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] - \frac{3 z (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right]$$

$$T_{xz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{(x^2 + y^2) z^2}{x (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$T_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{(x^2 + y^2) z^2}{y (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Supongamos la carga P aplicada en el origen de coordenadas y que el muro de contención puede ser representado por el plano de ecuación $x = -a$. Si por superposición de diferentes estados de carga obtenemos una solución tal que, para $x = -a$, $T_{xy} = T_{xz} = 0$, el dominio del espacio definido por $z \geq 0$ y $x \geq -a$ representará el terreno elástico, limitado por un muro de contención, de nuestro problema.

Pero obsérvese que si consideramos (fig. 2) un estado de carga ficticio, "imagen" o simétrico del

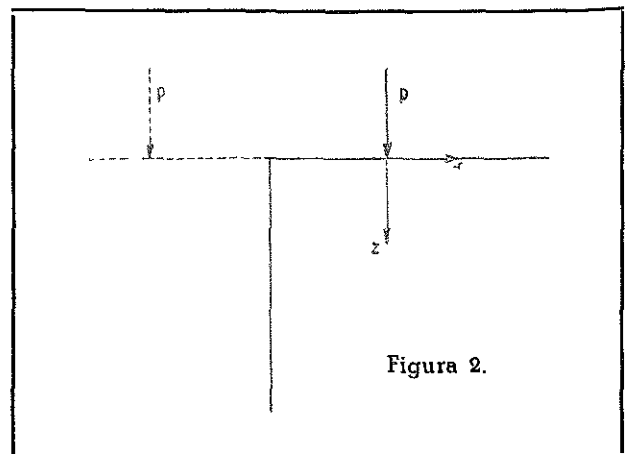


Figura 2.

real P respecto al plano $x = -a$, y lo superponemos al dado, por simetría en el muro $T_{xy} = T_{xz} = 0$. Las fatigas correspondientes al estado "imagen" tendrán expresiones analíticas análogas a las anteriores, sin más que poner en éstas $2a + x$ en vez de x .

El empuje sobre el muro por la acción de la carga concentrada P a distancia a valdrá, superponiendo ambos efectos:

$$\sigma_{xz} = -\frac{P}{\pi} \frac{1}{(a^2 + y^2)} \left[(1 - 2\nu) \left[\frac{a^2 - y^2}{a^2 + y^2} + \frac{z}{(a^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{y^2 - a^2}{y^2 + a^2} + \frac{zy^2}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] - \frac{3z a^2 (a^2 + y^2)}{(a^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right].$$

El signo $-$ se debe a que estamos considerando esfuerzos sobre el muro y no sobre el terreno adyacente.

Carga uniformemente distribuida sobre un área rectangular de lados 2α , 2β .

Si en vez de una carga P aplicada en el origen tenemos una p d x_1 , $d y_1$ aplicada en el punto $x_1 y_1$, el esfuerzo en el punto $(-a; y; z)$ del muro valdrá:

$$d\sigma_x = -\frac{p}{\pi} \frac{d x_1 d y_1}{(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2} \left[(1 - 2\nu) \left[\frac{(a + x_1)^2 - (y - y_1)^2}{(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \frac{z}{[(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{1/2}} \cdot \frac{(y - y_1)^2 - (a + x_1)^2}{(y - y_1)^2 + (a + x_1)^2} + \frac{z(y - y_1)^2}{[(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}} \right] - \frac{3z(a + x_1)^2[(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2]}{[(a + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{5/2}} \right].$$

donde x_1 varía de $-a + \alpha$ a $a + \alpha$, e y_1 de $-\beta$ a β . El efecto de toda la carga repartida sobre la "bue-lla" rectangular será:

$$\sigma_x = \int_{-a}^a \int_{-\beta}^{\beta} d\sigma_x.$$

Hagamos los cambios de variables $\left\{ \begin{array}{l} y - y_1 = Y \\ a + x_1 = X \end{array} \right\}$; resulta entonces:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} \int_{a-a}^{a+a} dx \int_{y+\beta}^{y-\beta} \left[(1 - 2\nu) \left[\frac{X^2 - Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} + \frac{z}{(X^2 + Y^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{Y^2 - X^2}{(X^2 + Y^2)^2} + \frac{zY^2}{(X^2 + Y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{X^2 + Y^2} \right] - 3 \frac{X^2 z}{(X^2 + Y^2 + z^2)^{5/2}} \right] dY.$$

Una primera integración nos permite poner:

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi} [\varphi(\beta) - \varphi(-\beta)];$$

siendo:

$$\varphi(\beta) = \int_{a-a}^{a+a} \left[(1 - 2\nu) \left[\frac{y + \beta}{X^2 + (y + \beta)^2} - \frac{y - \beta}{X^2 + (y - \beta)^2} \cdot \frac{z}{[X^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}} \right] - \frac{zX^2(y + \beta)}{(X^2 + z^2)(X^2 + (y + \beta)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2zX^2(y + \beta)}{(X^2 + z^2)^2(X^2 + (y + \beta)^2 + z^2)^{1/2}} \right] dX.$$

Integrando de nuevo y agrupando convenientemente los diversos términos, obtenemos como expresión del esfuerzo sobre el muro:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} [(1 - 2\nu) [\varphi_1(\alpha; \beta) - \varphi_1(-\alpha; \beta) - \varphi_1(\alpha; -\beta) + \varphi_1(-\alpha; -\beta)] + [\varphi_2(\alpha; \beta) - \varphi_2(\alpha; \beta) + \varphi_2(-\alpha; -\beta)]].$$

Siendo:

$$\varphi_1(\alpha; \beta) = \arctg \frac{y + \beta}{a + \alpha} + \arctg \frac{a + \alpha}{y + \beta} \cdot \frac{z}{[(a + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}};$$

$$\varphi_2(\alpha; \beta) = \frac{(a + \alpha)(y + \beta)z}{[(a + \alpha)^2 + z^2][(a + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}} - \arctg \frac{y + \beta}{z} \cdot \frac{a + \alpha}{[(a + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}}.$$

Estudio de la distribución de esfuerzos sobre el muro.

Prescindiendo de las características mecánicas generales de los terrenos, que tendremos en cuenta más adelante, vamos a hacer un estudio crítico del resultado obtenido en algunos casos sencillos.

Es conveniente observar que debe considerarse únicamente la determinación principal (entre $\frac{\pi}{2} y - \frac{\pi}{2}$) de las funciones \arctg al variar y desde $+\infty$ a $-\infty$.

1.º Para $z = 0$:

$$\varphi_1(\alpha; \beta) = \arctg \frac{y + \beta}{a + \alpha}, \quad \varphi_2(\alpha; \beta) = \frac{y + \beta}{|y + \beta|} \frac{\pi}{2}.$$

La distribución de esfuerzos sobre la parte superior del paramento es de la forma:

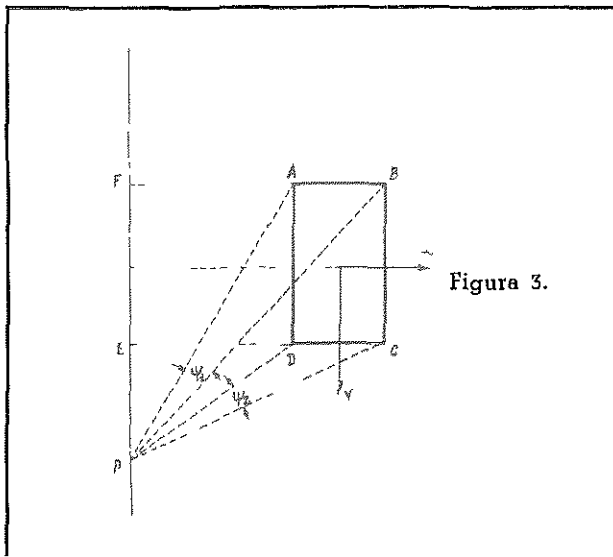


Figura 3.

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) \left[\arctg \frac{y+\beta}{a+\alpha} - \arctg \frac{y-\beta}{a+\alpha} - \arctg \frac{y+\beta}{a-\alpha} + \arctg \frac{y-\beta}{a-\alpha} \right]$$

Esta fórmula admite una representación gráfica sencilla, que resulta de expresar la tensión en cada punto como cantidad proporcional a la diferencia de ángulos bajo los que se ven los límites de la "huella" desde el punto considerado (fig. 3).

Resulta, por tanto:

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) [\gamma_1 - \gamma_2]$$

Como sentido positivo de los ángulos γ tomamos aquel en el que un observador, caminando sobre el muro de $y = +\infty$ hacia $y = -\infty$, viera a su frente los segmentos AB y DC de la figura 3.

Vamos a representar en el plano $\sigma_x; y$, la familia de curvas con tres parámetros:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) \left[\arctg \frac{y+\beta}{a+\alpha} - \arctg \frac{y-\beta}{a+\alpha} - \arctg \frac{y+\beta}{a-\alpha} + \arctg \frac{y-\beta}{a-\alpha} \right]$$

Con las limitaciones físicas $a \geq \alpha > 0$ y $\beta > 0$.

σ_x se anula para $y = \pm \sqrt{\beta^2 + a^2 - \alpha^2}$, siempre real, y para puntos infinitamente alejados del punto de aplicación de la carga.

Para $y = 0$:

$$\sigma_x = -\frac{2p}{\pi} (1 - 2\nu) \left[\arctg \frac{\beta}{a+\alpha} - \arctg \frac{\beta}{a-\alpha} \right];$$

expresión que nos muestra que el esfuerzo sobre la pared en la proximidad de la carga es de compresión.

Los puntos correspondientes a valores extremos de σ_x vienen dados por:

$$y = 0 \text{ e } y = \pm \sqrt{a^2 + \beta^2 - \alpha^2 \pm 2\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 + \beta^2 - \alpha^2)}}$$

Además de $y = \pm \infty$ que corresponden a esfuerzos nulos.

Con estos datos podemos ver que:

a) Si $(a^2 + \beta^2 - \alpha^2)^2 > 4(a^2 - \alpha^2)(a^2 + \beta^2 - \alpha^2)$ o, lo que es lo mismo, si $\beta^2 > 3(a^2 - \alpha^2)$, existen cinco puntos extremos a distancia finita;

b) Si $\beta^2 = 3(a^2 - \alpha^2)$, tres de dichos puntos coinciden en el eje $y = 0$.

c) Si $\beta^2 < 3(a^2 - \alpha^2)$, dos se hacen imaginarios.

Podemos recoger los diferentes casos en una figura, en la que, además, hemos representado el caso límite $a = \alpha$.

En estas figuras observamos que trabaja a compresión una zona del muro vista desde la carga bajo un ángulo próximo a 90° . Físicamente se comprende que el resto no está solicitado, pues si el terreno trabaja a compresión no puede transmitir esfuerzos de extensión al muro.

Vemos también que si la carga es tangente al muro, la solución matemática presenta discontinuidades incompatibles con la realidad física.

El hecho de que para $z = 0$ exista una zona de paramento no solicitada se explica fácilmente teniendo en cuenta la distribución de tensiones producidas por una carga en un medio semiinfinito (solución de BOUSSINESQ). Suponiendo para más sencillez el caso de carga concentrada, vemos que para $z = 0$:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \frac{1}{r^2}$$

o en coordenadas cartesianas:

$$\tau_x = \frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

que nos muestran que el esfuerzo σ_r es de extensión únicamente en la zona $x^2 - y^2 > 0$, luego cualquier muro de contención perpendicular a OX que limite el terreno se verá solicitado solamente en dicha zona.

Las discontinuidades en la distribución de esfuerzos para $a = \alpha$ se explican fácilmente debido

a que matemáticamente la carga distribuida se aplica en un rectángulo de forma que, al atravesar sus fronteras, la carga desaparece bruscamente, lo que no ocurre en la realidad, pues la desaparición del efecto de la carga es gradual.

Si aislamos dos elementos adyacentes al muro (figura 4) separados por un plano vertical frontal de la carga y establecemos el equilibrio, explicaremos claramente la presencia de la discontinuidad.

En efecto, los esfuerzos cortantes son nulos en las caras 1 y 2 por pertenecer al muro, en la cara horizontal superior del elemento 2, por coincidir con la superficie del terreno, y en las restantes caras de dicho elemento, por la reciprocidad de los esfuerzos tangenciales. Partiendo de la cara 1 y de la contigua al elemento 2, demostramos que sobre el elemento diferencial 1 no existen tampoco fuerzas cortantes. Las solicitaciones sobre los cubos se reducen a las indicadas en la figura, en la que se ha prescindido de infinitésimos de orden superior.

En el cubo 1, comprimido por la carga vertical p , habrá esfuerzos σ_{y1} y σ_{x1} que, lógicamente, son de compresión.

En el cubo 2, para $z = 0$, la componente vertical de la deformación es nula; resulta, por tanto, que $\sigma_{x2} + \sigma_{y2} = \sigma_{x1} + \sigma_{y1} = 0$; luego σ_{x2} representa una extensión, siendo patente la discontinuidad de σ_x .

Matemáticamente se puede comprobar que, para $a = \alpha$, las funciones variación de cargas con y , y distribución de esfuerzos sobre el muro, para $z = 0$, presentan discontinuidades del mismo orden en $y = \pm \beta$.

A manera de ejemplo, y con el fin de no complicar excesivamente los cálculos, vamos a limitarnos a la carga prismática de la figura 5.

El empuje sobre el muro producido por una carga p dh uniformemente distribuida sobre el rectángulo de lados 2α ; $2 \frac{l-h}{l} \beta$, vale:

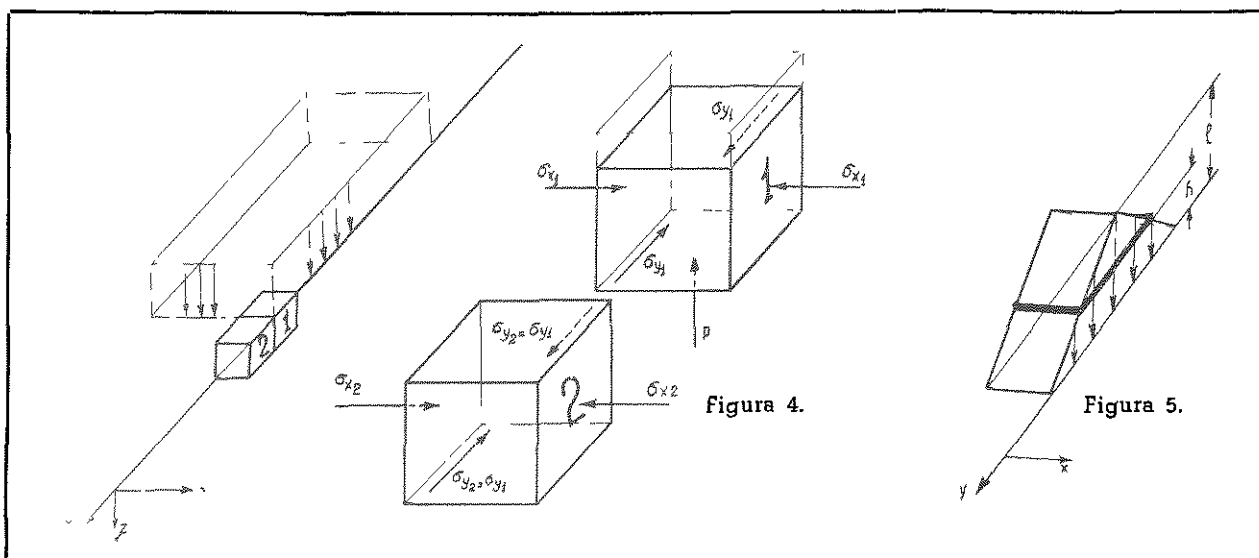
$$d\sigma_x = dh \frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) \left[\arctg \frac{y + \frac{l-h}{l} \beta}{a + \alpha} - \arctg \frac{y - \frac{l-h}{l} \beta}{a + \alpha} - \arctg \frac{y + \frac{l-h}{l} \beta}{a - \alpha} + \arctg \frac{y - \frac{l-h}{l} \beta}{a - \alpha} \right];$$

luego:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) \int_0^l \left[\arctg \frac{y + \frac{l-h}{l} \beta}{a + \alpha} - \arctg \frac{y - \frac{l-h}{l} \beta}{a + \alpha} - \arctg \frac{y + \frac{l-h}{l} \beta}{a - \alpha} + \arctg \frac{y - \frac{l-h}{l} \beta}{a - \alpha} \right] dh,$$

y con el cambio de variable $\frac{l-h}{l} \beta = H$ resulta:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} (1 - 2\nu) \frac{l}{\beta} \int_0^\beta \left[\arctg \frac{y + H}{a + \alpha} - \arctg \frac{y - H}{a + \alpha} - \arctg \frac{y + H}{a - \alpha} + \arctg \frac{y - H}{a - \alpha} \right] dH =$$



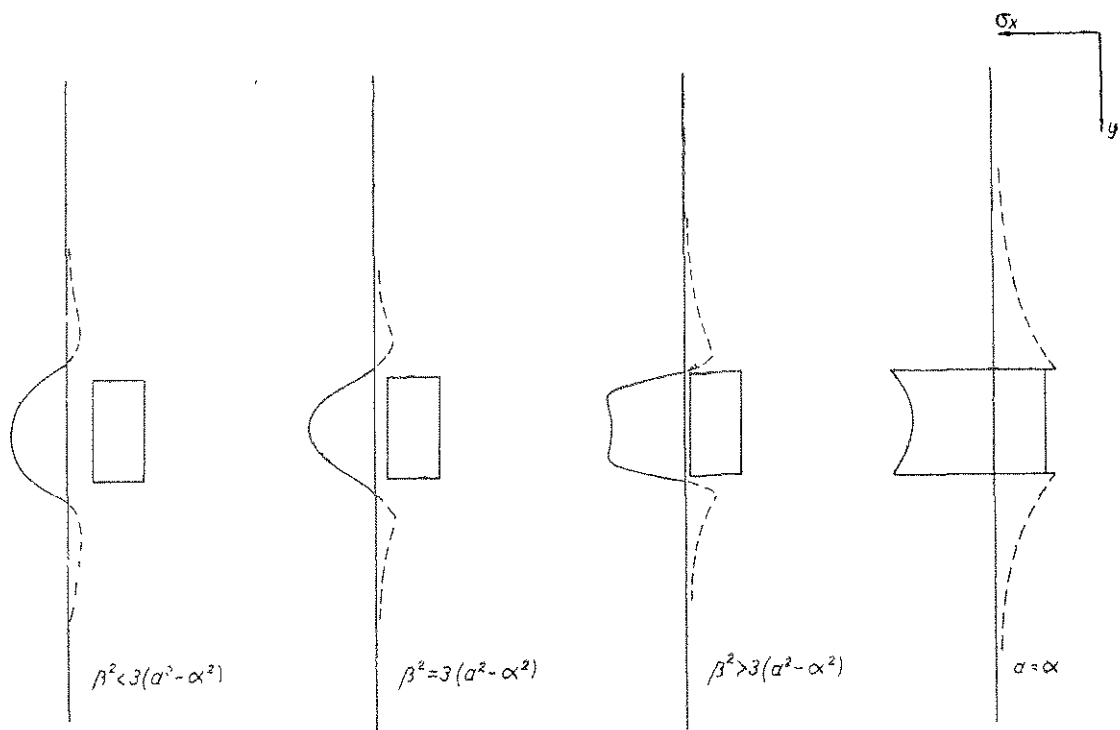


Figura 6, a. Distribución de esfuerzos sobre el muro $Z=0$.

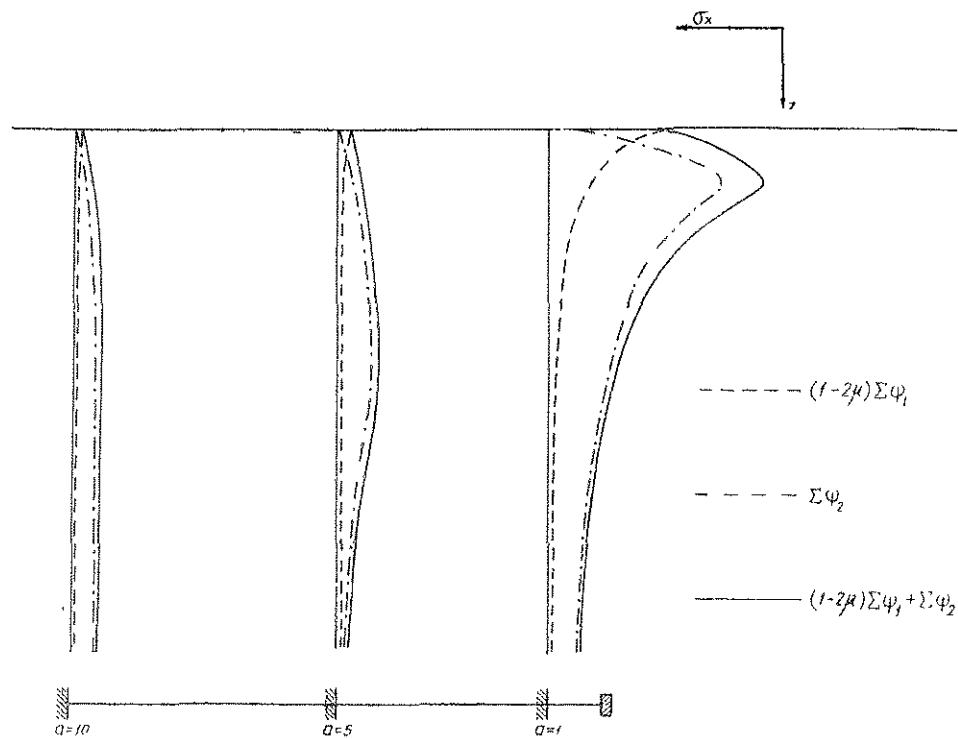


Figura 6, b. Distribución de esfuerzos sobre el muro $Y=0$.

$$= \frac{p}{\pi} (1 - 2\mu) \frac{t}{\beta} \left[(y + \beta) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{y + \beta}{a + \alpha} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y + \beta}{a - \alpha} \right] + (y - \beta) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{a + \alpha} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{a - \alpha} \right] + 2y \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{a - \alpha} - 2y \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{a + \alpha} + \frac{a - \alpha}{2} \log \frac{1 + \left(\frac{y + \beta}{a - \alpha} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{a - \alpha} \right)^2} + \frac{a - \alpha}{2} \log \frac{1 + \left(\frac{y - \beta}{a - \alpha} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{a - \alpha} \right)^2} - \frac{a + \alpha}{2} \log \frac{1 + \left(\frac{y + \beta}{a + \alpha} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{a + \alpha} \right)^2} - \frac{a + \alpha}{2} \log \frac{1 + \left(\frac{y - \beta}{a + \alpha} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{a + \alpha} \right)^2} \right]$$

que, como fácilmente se comprueba, es continua, pero con punto anguloso para $y = \pm \beta$ a α .

En general, de la figura 4 resulta evidente que si el salto de presiones, al atravesar el contorno de la huella es infinitésimo de orden n , el salto correspondiente de tensiones sobre el muro es del mismo orden cuando menos.

Conviene observar que, para $Z = 0$ y cualesquiera que sean x e y , es $\sigma_x + \sigma_y = 0$, luego la superficie horizontal del terreno no sufre deformación, salvo en la zona de aplicación de la carga.

2.º Para $y = 0$, la distribución de esfuerzos sobre el paramento es de la forma:

$$\sigma_x = \frac{2p}{\pi} \left[(1 - 2\mu) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{a + \alpha} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{a - \alpha} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a + \alpha}{\beta} \cdot \frac{z}{[(a + \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a - \alpha}{\beta} \cdot \frac{z}{[(a - \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} \right] + \left[\frac{(a + \alpha) \beta z}{[(a + \alpha)^2 + z^2][(a + \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{z} \cdot \frac{a + \alpha}{[(a + \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{(a - \alpha) \beta z}{[(a - \alpha)^2 + z^2][(a - \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{z} \cdot \frac{a - \alpha}{[(a - \alpha)^2 + \beta^2 + z^2]^{1/2}} \right] \right]$$

En la figura 6 b tenemos representada la variación de σ_x con Z , para $\mu \neq 0,5$. Los términos dependientes de μ decrecen al aumentar z , mientras que los independientes presentan un máximo para un valor de Z que es función de a , α y β

3.º Para $y = \pm \beta$:

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[(1 - 2\mu) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta}{a + \alpha} - \operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta}{a - \alpha} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a + \alpha}{2\beta} \cdot \frac{z}{[(a + \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a - \alpha}{2\beta} \cdot \frac{z}{[(a - \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} \right] + \left[\frac{(a + \alpha) 2\beta z}{[(a + \alpha)^2 + z^2][(a + \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta}{z} \cdot \frac{a + \alpha}{[(a + \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{(a - \alpha) 2\beta z}{[(a - \alpha)^2 + z^2][(a - \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta}{z} \cdot \frac{a - \alpha}{[(a - \alpha)^2 + (2\beta)^2 + z^2]^{1/2}} \right] \right]$$

que es igual a la distribución de esfuerzos en el plano $y = 0$ para un rectángulo de lados 2α ; 4β y carga $\frac{p}{2}$ por unidad de área.

Generalización al caso de dos muros iguales y paralelos.

Consideremos una carga P situada entre dos muros, 1 y 2 (fig. 7), iguales y paralelos. Supongámosla suficientemente grande, de forma que dé empujes apreciables en uno y otro.

La condición de libre resbalamiento en 1 y 2 nos obliga a introducir P_1 y P_2 , respectivamente. Ahora bien, si P es suficientemente grande, la acción de P_1 sobre 2 no será despreciable; debemos introducir la carga P_{12} para anular la fuerza cortante en 2. De la misma forma introduciremos P_{21} , prosiguiendo indefinidamente el proceso mientras no podamos, dentro de la aproximación deseada, anular las fuerzas cortantes en los muros 1 y 2.

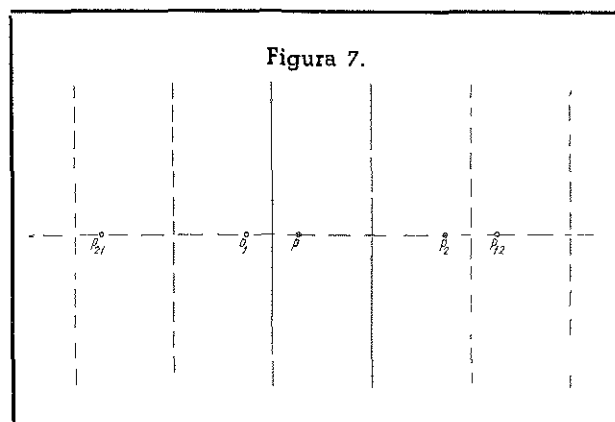


Figura 7.

Validez de los resultados obtenidos y su comparación con datos experimentales.

El estudio anteriormente realizado es válido para cualquier medio elástico en contacto con un muro rígido, no habiéndose hecho ninguna hipótesis sobre las propiedades mecánicas del terreno, salvo el resbalamiento a lo largo del muro.

Diversas experiencias realizadas para la medición del módulo de POISSON de un terreno (Ref. 4), parecen indicar que, al menos en las proximidades de la superficie del terreno y del muro, la deformación se presenta a volumen constante, es decir, para un valor de $\mu = 0,5$, con lo que la expresión del esfuerzo sobre el muro toma la forma:

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} [\psi_2(\sigma; \beta) - \psi_2(-\sigma, \beta) - \psi_2(\sigma; -\beta) + \psi_2(-\sigma; -\beta)],$$

siendo:

$$\psi_2(\sigma, \beta) = \frac{(a + \sigma)(y + \beta)z}{[(a + \sigma)^2 + z^2][(a + \sigma)^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}} - \arctg \frac{y + \beta}{z} \cdot \frac{a + \sigma}{[(a + \sigma)^2 + (y + \beta)^2 + z^2]^{1/2}}.$$

En el año 1938, M. G. SPANGLER (Ref. 4) realizó, en el Iowa State College, diferentes mediciones del empuje que sufría un muro por la aplica-

ción de una carga sobre el terreno. Para ello usó un muro de contención de hormigón de 2,10 m. de altura por 4,50 m. de longitud, en contacto con un relleno de grava, la carga la hizo por medio de un camión elevado con un gato y colocado a distancia a variable, las mediciones se hicieron en estado seco y húmedo, comprobándose que los esfuerzos máximos se presentaban en el plano $y = 0$. Experimentos similares a los de SPANGLER fueron hechos en 1929 por GERBER en Suiza.

En la figura 8 comparamos las mediciones de SPANGLER con los resultados obtenidos; el acuerdo es mejor para carga próxima a la pared que a gran distancia, y los resultados son conservativos.

Aplicación de los resultados obtenidos al estado de carga debido a un avión en estacionamiento, rodadura o aterrizaje.

La superficie de contacto del neumático de una rueda de avión con el suelo es aproximadamente una elipse cuya área depende de la presión de inflado y de si la carga sobre el suelo actúa de una manera estática o dinámica (Ref. 1).

De los resultados obtenidos en diferentes experiencias efectuadas por las fábricas de neumáticos se puede deducir que, en esta elipse, el eje mayor es, aproximadamente, 2,35 veces el menor, teniendo

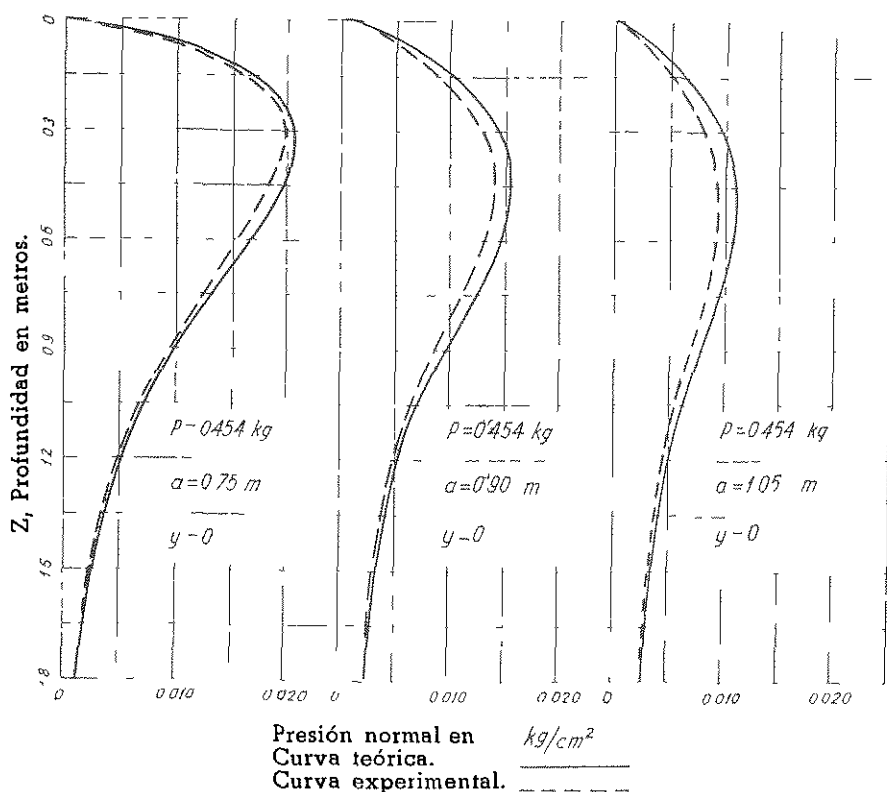
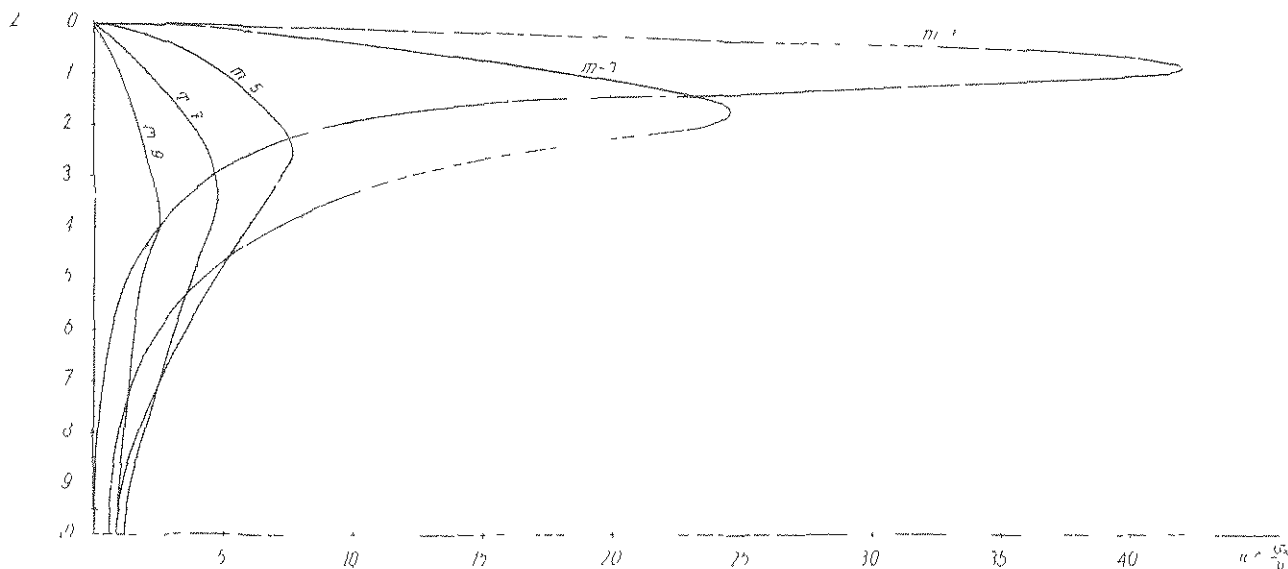


Figura 8.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{Z}{\alpha} \\ \alpha &= m \alpha \\ \beta &= 1,84 \alpha \end{aligned}$$



do éste último un límite que es el ancho de la rueda, pasado el cual solamente aumenta el eje mayor cuando se aumenta la carga. Con esta hipótesis los cálculos son prácticamente inabordables, por lo que sustituimos esta superficie de carga por otra rectangular, en la que el lado menor es igual al eje menor de la elipse, siendo las áreas iguales en uno y otro caso. Resultando, por tanto:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2,35 \frac{\pi}{4} = 1,84.$$

Si hacemos:

$$a = m \alpha; \quad Z = \frac{z}{\alpha}; \quad Y = \frac{y}{\beta}$$

podemos poner la expresión del esfuerzo sobre el muro en forma adimensional.

En particular para $Y = 0$:

$$\frac{\sigma_x}{p} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1,84 (m+1) Z}{[(m+1)^2 + Z^2] [(m+1)^2 + 3,40 + Z^2]^{1/2}} - \frac{1,84 (m-1) Z}{[(m-1)^2 + Z^2] [(m-1)^2 + 3,40 + Z^2]^{1/2}} \right]$$

$$\begin{aligned} & - \arctg \frac{1,84 (m+1)}{Z [(m+1)^2 + 3,40 + Z^2]^{1/2}} + \\ & + \arctg \frac{1,84 (m-1)}{Z [(m-1)^2 + 3,40 + Z^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

En el gráfico adjunto indicamos valores de $100 \frac{\sigma_x}{p}$ para cinco valores distintos de m y Z , variando entre 0 y 10.

Referencias.

1. F. LÓPEZ PEDRAZA: *Aeropuertos*. INTA. Madrid, 1947.
2. K. TERZAGHI: *Mecánica teórica de suelos*. Acme Agency. Buenos Aires, 1945.
3. S. TIMOSHENKO y J. N. GOODIER: *Theory of Elasticity*. McGraw Hill Book Company Inc. New York-Londres, 1951.
4. D. P. KRYNINE: *Mecánica de suelos*. Ediar. Buenos Aires, 1951.